Übungsstunde 10:

- Determinante
- Das Eigenwertproblem:
  - ↳ Eigenwerte
  - ↳ Eigenvektoren
  - ↳ Bei symmetrischen Matrizen
- Anwendungen:
  - ↳ $\underline{\underline{A}}^k$
  - ↳ $e^{\underline{\underline{A}}}$
- Differentialgleichungssysteme

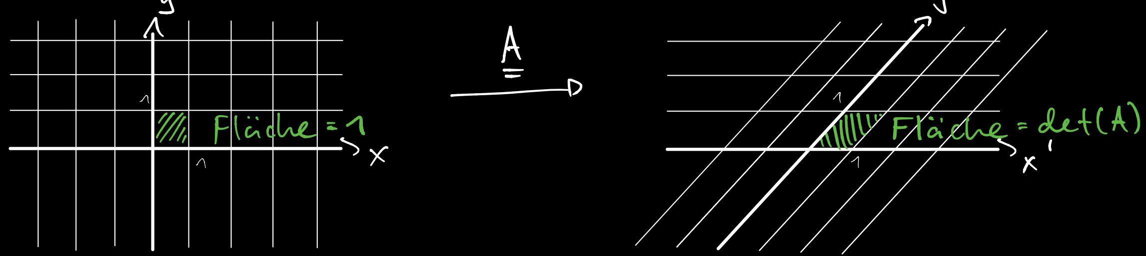
Determinante:

$$\det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{A}} \mapsto \det(\underline{\underline{A}})$$

Bildet jede $n\times n$ Matrix auf eine reelle Zahl ab

⚠ Nicht definiert für nicht-quadratische Matrizen (ausser Gram'sche Determinante, wird in Analysis II behandelt)

Interpretation: Flächenveränderung durch die Matrix



Berechnungsmethoden:

2×2-Matrizen: $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{ad - bc}}$

3×3-Matrizen: Regel von Sarrus:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = \underline{aei + bfg + cdh} \; \underline{- gec - hfa - idb}$$

Laplac'sche Entwicklungssatz:

Generelle Metho, welche für beliebige quadratische Matrizen funktioniert (also auch für 2×2 & 3×3 M.)

Ist eine rekursive Methode von folgender Form:

Wählt eine beliebige Spalte o. Zeile

Kann weiter reduziert werden

$$\det\begin{bmatrix} \boxed{\overset{+}{a}} & \overset{-}{b} & \overset{+}{c} \\ \overset{-}{d} & \overset{+}{e} & \overset{-}{f} \\ \overset{+}{g} & \overset{-}{h} & \overset{+}{i} \end{bmatrix} = +a\cdot\det\begin{bmatrix} \overset{+}{e} & \overset{-}{f} \\ \overset{-}{h} & \overset{+}{i} \end{bmatrix} - d\cdot\det\begin{bmatrix} \overset{+}{b} & \overset{-}{c} \\ \overset{-}{h} & \overset{+}{i} \end{bmatrix} + g\cdot\det\begin{bmatrix} \overset{+}{b} & \overset{-}{c} \\ \overset{-}{e} & \overset{+}{f} \end{bmatrix}$$

Gehen durch alle Koeff. der Zeile / Spalte & reduzieren die Determinante

Muster würde so weiter gehen

↳ Wählt die Zeile / Spalte möglichst geschickt, also mit möglichst vielen Nullen, sodass Terme wegfallen

Das Eigenwertproblem:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \overset{\text{EW}}{\lambda}\,\overset{\text{EV}}{\underline{x}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \lambda\underline{x} = 0$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}})}\,\underline{x} = 0 \qquad \leftarrow \underline{x} = 0$$

Möchten einen Rangverlust für nicht-triviale $\underline{x} \neq 0$!

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}) \overset{!}{=} 0$$

⇝ Charakteristisches Polynom

$$\Rightarrow Chp(\lambda) := \det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}) \hat{=} (\text{faktorisiert}) \hat{=} (\lambda - a_1)^{k}(\lambda - a_2)^{l}\cdots(\lambda - a_n)^{p}$$

$$\overset{!}{=} 0 \qquad \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ k + l + \ldots + p = n$$

↳ gibt uns $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ EW von $\underline{\underline{A}}$

Beispiel 10.1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \text{EW:} \quad \det[\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}] = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 2}},\ \underline{\underline{\lambda_2 = 1}}$$

Eigenschaften:

- ∃ mindestens 1 EW → In alle Eigenvektor-Richtungen mit demselben Faktor gestreckt
- ∃ maximal n EW → " " verschiedenen " " "
- k & l sind die $\boxed{\text{algebraischen Vielfachheiten}}$ des jeweiligen

EW

- $\sum$ alg. Vielfachheiten $\overset{!}{=} n$
- EW einer Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente
- λ EW von $\underline{\underline{A}} \Rightarrow \lambda^{-1}$ EW zu A^{-1} (falls inv.)
- $\text{spur}(\underline{\underline{A}}) = \sum$ EW mit jeweiligen alg. Vielfachheit

  ↳ $\text{spur}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ oder $2 \cdot \lambda_1$ falls $\lambda_1 = \lambda_2$

<u>Eigenvektoren:</u>

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{x} = 0$$

$\Rightarrow$ liefert uns die Eigenvektoren zu den entsprechenden Eigenwerten

Bsp. 10.2: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \underline{2}, \quad \lambda_2 = \underline{1}$

EV:

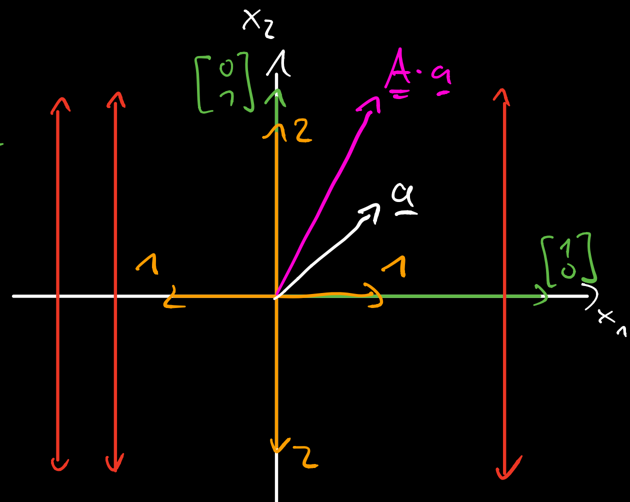
$\lambda_1 = 2$: $\begin{bmatrix} 1-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \in \mathbb{R} \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_2 = 1$: $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = t \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$



Eigenschaften:

- dim des Eigenraumes eines EW nennt man die geometrische Vielfachheit
- $1 \leq$ geom. Vielf. $\leq$ alg. Vielf. $\leq n$
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden $\rightarrow \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ sind linear unabhängig
- $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}$ & $\underline{\underline{C}}$ ähnlich

$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[r, "A"] & \tilde{B} \arrow[d, "T^{-1}"] \\ B \arrow[u] \arrow[r, "C"'] & B \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ Chp(λ) von $\underline{\underline{A}}$ = Chp(λ) von $\underline{\underline{C}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ & $\underline{\underline{C}}$ haben dieselben EW

$\underline{x} \in$ EV von $\underline{\underline{A}}$

$\underline{y} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x} \in$ EV von $\underline{\underline{C}}$

- Falls $\forall i: \lambda_i$ alg. Vielf. $= 1 \Rightarrow \underline{\underline{A}}$ einfach
- Falls $\forall i: \lambda_i$ alg. Vielf. = geom. Vielf. $\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ halbeinfach
  - ↳ $\underline{\underline{A}}$ halbeinfach $\rightarrow \underline{\underline{A}}^n$ & $\underline{\underline{A}}^T$ ebenfalls halbeinfach
  - ↳ $\underline{\underline{A}}$ einfach $\rightarrow \underline{\underline{A}}^n$ <u>nicht</u> unbedingt einfach

Diagonalisierbarkeit:

- Falls $\exists\, \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.d. $\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar

- Spalten von $\underline{\underline{T}}$ sind die EV von $\underline{\underline{A}}$
- Einträge in $\underline{\underline{D}}$ sind die entsprechenden EW von $\underline{\underline{A}}$

↳ Achtet auf die

Folgende Aussagen sind äquivalent: Reihenfolge!

- A ist halbeinfach
- A besitzt eine Eigenbasis
- A ist diagonalisierbar

Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen: A symm.

- Alle EW von A sind reell
- EV zu EW $\lambda_i \neq \lambda_j$ sind orthogonal!
- A ist halbeinfach $\Rightarrow$ diagonalisierbar
- A besitzt eine ONB als Eigenbasis
- $T^{-1} A T = D \iff T^{T} A T = D$

  ↳ Falls T orthogonal gewählt!

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T^{-1}"'] & \text{Standardbasis} \\ \cdot \arrow[r, "D"'] & \text{Eigenbasis} \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

$A = T D T^{-1}$

$D = T^{-1} A T$

Anwendungen des Eigenwertproblemes:

$A^k x$:

$$A^k = (T D T^{-1})^k$$
$$= (T D \underbrace{T^{-1})(T}_{I} D \underbrace{T^{-1})(T}_{I} D \underbrace{T^{-1})(}_{I} \dots \underbrace{)(T}_{I} D T^{-1})$$
$$= T D^k T^{-1}$$
$$\Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} d_1 & & & \emptyset \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & & \emptyset \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n^k \end{bmatrix}$$

$e^{A} x$:

$$e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T D T^{-1})^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T D^n T^{-1}}{n!} = T \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} \right)} T^{-1}$$
$$= T e^{D} T^{-1}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_1^n}{n!} & & \emptyset \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_2^n}{n!} & \\ \emptyset & & \ddots \end{bmatrix}$$

Eigenschaften:

- $$e^{\underline{\underline{A}}^T} = \left(e^{\underline{\underline{A}}}\right)^T$$

- $$\frac{d}{dt}\left(e^{\underline{\underline{A}}t}\right) = \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}}t}$$

- $$e^{\underline{\underline{D}}} = e^{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{T}}^{-1} e^{\underline{\underline{A}}}\, \underline{\underline{T}}$$

- $$\det\left(e^{\underline{\underline{A}}}\right) = e^{\mathrm{spur}(\underline{\underline{A}})}$$

Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung:

gekoppeltes Differentialgleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots\dots + a_{nn}y_n \end{array}\right. \quad \left|\quad \begin{array}{l} \text{AWP:} \\ y_1(0) = y_{10} \\ y_2(0) = y_{20} \\ \vdots \\ y_n(0) = y_{n0} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\,\underline{y}_0 = e^{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}}\,\underline{y}_0 = \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x}\, \underline{\underline{T}}^{-1}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}}_{\underline{z}}$$

$$\underline{z} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{T}}\,\underline{z}$$

$$\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \quad | \qquad \underline{y}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{z}$$

$$\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}'}_{} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{z}$$

$$\underline{z}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{z}$$

$$z_1' = d_1 z_1$$

$$z_2' = 0 + d_2 z_2$$

$$z_3' = 0 + 0 + 0 + d_3 z_3$$

$$\vdots$$

$$z_n' = 0 + \ldots + 0 + d_n z_n$$

$\downarrow$ Eulersche Ansatz $z(x) = e^{\lambda x} \cdot C$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= e^{d_1 x} z_{10} \\ z_2 &= e^{d_2 x} z_{20} \\ &\vdots \\ z_n &= e^{d_n x} z_{n0} \end{aligned}\right\} \underline{z} = e^{\underline{\underline{D}}x} \underline{z}_0$$

$$\underline{y}(x) = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{z}(x) = \boxed{\underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x} \underline{z}_0} = \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x} \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{y}_0$$

$$= \boxed{z_{10} e^{d_1 x} \begin{bmatrix} | \\ t_1 \\ | \end{bmatrix} + \ldots + z_{n0} e^{d_n x} \begin{bmatrix} | \\ t_n \\ | \end{bmatrix}}$$

EW

EV

Beispiel 10.3: $\quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix}$

$$y' = \underline{\underline{A}}\, y$$

EW: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \overset{!}{=} 0$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \overset{!}{=} 0$$

$$= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6$$

$$= \lambda^2 \underbrace{-3}_{+}\lambda \underbrace{-4}_{\cdot}$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 1) \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = \underline{4} \\ \lambda_2 = \underline{-1} \end{array}$$

EV:

$\lambda_1 = 4: \quad \left.\begin{matrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \xrightarrow{G.} \quad \left.\begin{matrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = \frac{1}{3} t \end{array}$

$$\Rightarrow E_4 = \underline{\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\lambda_2 = -1: \quad \left.\begin{matrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \xrightarrow{G.} \quad \left.\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = s \in \mathbb{R} \\ x_1 = -\frac{1}{2} s \end{array}$

$$\Rightarrow E_{-1} = \underline{\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}(x) = z_{10}\, e^{4x} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + z_{20}\, e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}(0) = \underline{\underline{T}}\, \underline{z}(0) \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{matrix}\,\right|\, \begin{matrix} 0 \\ 10 \end{matrix} \quad \xrightarrow{G.} \quad \left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{matrix}\,\right|\, \begin{matrix} 0 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad z_{20} = \underline{-2}$$

$$z_{10} = \underline{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}(x) = 2\, e^{4x} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\, e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$